El meta-análisis, parte II: fundamentos estadísticos

Gabriel Cavada Ch.[1,2]
[1]Facultad de Medicina, Universidad de los Andes.
[2]División de Bioestadística, Escuela de Salud Pública, Universidad de Chile.

The meta-analysis, Part II: statistical foundations

Como se expuso en el artículo anterior (El meta análisis, parte I: Fundamentos estadísticos), el resultado más relevante, es que cuando se tiene una colección de p-values, provenientes de la misma dócima de hipótesis, ensayada sobre la misma población, la expresión: -2ln (F(p)), donde p es el p-value, esta tiene una distribución Chi-cuadrado con 2 grados de libertad. Pero una propiedad que tiene la distribución Chi-cuadrado es que al sumar dos variables aleatorias independientes cada una proveniente de distribuciones Chi-cuadrado con distintos grados de libertad, esta suma es otra variable aleatoria con distribución Chi-cuadrado cuyos grados de libertad son la suma de los grados de libertad de las variables aleatorias que se suman, en símbolos:

Si $X_1 \sim \chi^2_n$ y $X_2 \sim \chi^2_m$ con X_1 independiente de X_2, entonces $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{n+m}$. Obviamente este resultado puede extenderse a "k" variables aleatorias independientes, modo que si cada variable aleatoria fuera tal que $X_i \sim \chi^2_{n_i}$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2_{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

Por lo tanto si cada p-value tiene una distribución Chi-cuadrado con 2 grados de libertad, la suma de "s" p-values tiene una distribución Chi-cuadrado con 2s grados de libertad. Este es otro resultado relevante pues $\sum_{i=1}^{s} -2\ln\left(F(p_i)\right) \sim \chi^2_{2s}$, con lo que es posible calcular la significación estadística de la expresión a partir de una colección de p-values conocidos. Por ejemplo, al tomar la colección de p-values mostrados en el artículo anterior, se puede completar la siguiente tabla:

id	p-values	-2lnp
1	0,1370	3,9755
2	0,6432	0,8826
3	0,5578	1,1675
4	0,6048	1,0057
5	0,6842	0,7590
6	0,1087	4,4383
7	0,6185	0,9609
8	0,0611	5,5905
9	0,5552	1,1769
10	0,8714	0,2753
11	0,2551	2,7322
12	0,0445	6,2245
13	0,4242	1,7151
14	0,8983	0,2145
15	0,5219	1,3006
16	0,8414	0,3454
17	0,2110	3,1118
18	0,5644	1,1440
19	0,2648	2,6576
20	0,9477	0,1074
Suma total		39,7853

Ahora si se preguntara por la significación de que la suma de estos 20 p-values no superara la significación clásica del 5%, deberíamos proceder como sigue: Calculamos -2ln(0,05)*20 (suponemos que cada uno de los p-values es menor que 0,05), cuyo resultado es 119,8 (valor crítico), como este valor es más grande que 39,78 (valor observado), la conclusión es que con la suma de los p-value dados no es posible acercarse a la significación estadística.

Ahora, si los 20 p-values dados hubieran sido:

id	p-values	-2lnp
1	0,0014	13,1859
2	0,0064	10,0929
3	0,0056	10,3778
4	0,0060	10,2161
5	0,0068	9,9694
6	0,0011	13,6487
7	0,0062	10,1713
8	0,0006	14,8008
9	0,0056	10,3872
10	0,0087	9,4856
11	0,0026	11,9425
12	0,0004	15,4349
13	0,0042	10,9254
14	0,0090	9,4248
15	0,0052	10,5109
16	0,0084	9,5557
17	0,0021	12,3221
18	0,0056	10,3543
19	0,2000	3,2189
20	0,8000	0,4463
Suma total		206,4716

La suma total es 206,5 que es mayor al valor crítico de 119,8, por lo tanto la suma (combinación) de estos p-values induciría una conclusión significativa, aun cuando los p-values 19 y 20 están muy por encima de la significación estadística.